به نام زندگی

معادلات دیفرانسیل کامل

$d\varphi = M\,dx + N\,dy = 0 \longrightarrow$ جواب معادله $\varphi = C$

$M\,dx + N\,dy = 0$ شرط کامل بودن معادله دیفرانسیل

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \longrightarrow$ معادله کامل است.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = M & (\mathrm{I}) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

مثال: معادله های دیفرانسیل زیر را حل کنید

1) $$\overbrace{(2xy+\sin y)}^{M}\,dx+\overbrace{(x^2+x\cos y)}^{N}\,dy=0$$

$$y'=f(x,y)$$

برای چک کردن اینکه حالت‌های
1 یا 2 یا 3 برای معادله برقرار
هست یا نه:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+\sin y}{x^2+x\cos y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + \cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + \cos y$$

$\rightarrow$ معادله کامل است.

با شروع از رابطه‌ی (I) معادله را حل می‌کنیم

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M = 2xy + \sin y \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N = x^2 + x\cos y \qquad (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow \varphi = x^2 y + x \sin y + h(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{x \cos y} + h'(y) = \cancel{x^2} + \cancel{x \cos y}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \quad \Rightarrow h(y) = c$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = x^2 y + x \sin y + c$$

$\Rightarrow$ جواب معادله : $\varphi(x,y) = c'$

2) $\underbrace{\left(e^{y^2} + \frac{1}{x} + 1\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(2xye^{y^2} + \frac{1}{y} - 2\right)}_{N} dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ye^{y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2ye^{y^2}$$

$\longrightarrow$ معادله کامل است.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M = e^{y^2} + \frac{1}{x} + 1 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N = 2xye^{y^2} + \frac{1}{y} - 2 \qquad (\mathrm{II})$$

از طرفین رابطه 2 نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\varphi = x e^{y^2} + \ln|x| + x + h(y)$$

$$, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \implies \cancel{2yx e^{y^2}} + h'(y) = \cancel{2xy e^{y^2}} + \frac{1}{y} - 2$$

$$\implies h'(y) = \frac{1}{y} - 2 \implies h(y) = \ln|y| - 2y + c$$

$$\implies \varphi(x,y) = x e^{y^2} + \ln|x| + x + \ln|y| - 2y + c$$

جواب معادله $\varphi(x,y) = c'$

$$\varphi(x,y) = x e^{y^2} + \ln|xy| + x - 2y = c'$$

3) $$\underbrace{\left(e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + 3y\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(\frac{(1+y)^2}{1+y^2} + 3x\right)}_{N} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

$\Rightarrow$ معادله کامل است.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + 3y \qquad (\mathrm{I})$$

,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N = \frac{\overbrace{(1+y)^2}^{1+y^2+2y}}{1+y^2} + 3x = 1 + \frac{2y}{1+y^2} + 3x \qquad (\mathrm{II})$$

از طرفین رابطه II $\Longrightarrow$ نسبت به y انتگرال می‌گیریم.

$$\varphi = y + \ln(1+y^2) + 3xy + g(x)$$

$$, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M \Rightarrow \cancel{3y} + g'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + \cancel{3y}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \int \underbrace{e^{x^2}}_{u} \, \underbrace{dx}_{dv} + \int 2x^2 e^{x^2} \, dx + C$$

$$= x e^{x^2} - \cancel{\int x \left(2x e^{x^2}\right) dx} + \cancel{\int 2x^2 e^{x^2} \, dx} + C$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = x e^{x^2} + C \qquad \Rightarrow \varphi(x,y) = y + \ln(1+y^2) + 3xy + xe^{x^2} + C$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی : $\varphi(x,y) = c'$

یادآوری :

$$e^{g(x)} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} g'(x)\, e^{g(x)}$$

$$، \quad \int g'(x)\, e^{g(x)}\, dx = e^{g(x)}$$

$$\int e^{g(x)}\, dx$$: از جزء به جزء کمک می‌گیریم

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

حالت پنجم (5) : ممکن است نتوانیم معادله‌ی دیفرانسیل به فرم $Mdx + Ndy = 0$

را که به خودی خود، کامل نیست، با استفاده از یک فاکتور مشترک که به آن فاکتور انتگرال

یا عامل انتگرال‌ساز می‌گوییم، تبدیل به یک معادله کامل کنیم.

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

* فاکتور انتگرال یا عامل انتگرال‌ساز

فرض کنیم معادله‌ی دیفرانسیل $Mdx + Ndy = 0$ کامل نباشد. اگر بتوانیم تابع

$\mu(x,y)$ را پیدا کنیم، به طوری که معادله‌ی

$\mu M dx + \mu N dy = 0$

کامل باشد . یعنی داشته باشیم

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \frac{\partial M}{\partial y} \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x} \mu$$

$$\Rightarrow \left(\overbrace{\frac{\partial M}{\partial y}}^{M_y} - \overbrace{\frac{\partial N}{\partial x}}^{N_x} \right) \mu = \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial x}}_{\mu_x} N - \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial y}}_{\mu_y} M \qquad (*)$$

اگر بتوانیم معادله (*) را حل کنیم، فاکتور انتگرال به دست می‌آید و می‌توان معادله دیفرانسیل را کامل کرده و جواب معادله را به دست آورد.

برای حل معادله (*) حالت‌های ساده کننده‌ی زیر را می‌توان در نظر گرفت.

الف) اگر μ فقط تابعی از x باشد یعنی $\mu = \mu(x)$

در این صورت رابطه (*) به صورت زیر خواهد بود،

$$(M_y - N_x)\mu = \frac{d\mu}{dx} N \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} dx$$

* برای اینکه معادله‌ی بالا جواب داشته باشد، با توجه به اینکه می‌دانیم μ فقط تابعی از x است، باید عبارت $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ نیز تابعی فقط از x باشد. در این صورت معادله به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{d\mu}{\mu} = \underbrace{\frac{M_y - N_x}{N}}_{h(x)} dx = h(x)\,dx$$

جواب معادله (فاکتور انتگرال)

$$\Rightarrow \ln \mu = \int h(x)\,dx \Rightarrow \mu = e^{\int h(x)\,dx}$$

مثال :

$$\underbrace{(2y-3x)}_{M}\,dx+\underbrace{x}_{N}\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

از طرف دیگر می‌بینیم که

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{1}{x}=h(x)$$

و بنابراین یک فاکتور انتگرال μ به صورت تابعی از x وجود دارد.

$$\frac{d\mu}{\mu} = h(x)\,dx \longrightarrow \ln\mu = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$\Longrightarrow \mu = x$$

$$(2y - 3x)\,dx + x\,dy = 0 \xRightarrow[\text{فاکتور انتگرال}]{\mu = x}$$

$$\underbrace{(2xy - 3x^2)}_{M}\,dx + \underbrace{x^2}_{N}\,dy = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{cases} \Longrightarrow \text{معادله کامل است}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M = 2xy - 3x^2 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N = x^2 \qquad (\mathrm{II})$$

از رابطه‌ی I نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\Longrightarrow \quad x^2 y - x^3 + h(y) = \varphi(x, y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \Rightarrow x^2 + h'(y) = x^2 \longrightarrow h'(y) = 0$$

$$\Rightarrow h(y) = c$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,y) = x^2 y - x^3 + c$$

$\Rightarrow$ جواب معادله : $\varphi(x,y) = c' = x^2 y - x^3$

ب) اگر μ به صورت تابعی فقط از y باشد یعنی $\mu = \mu(y)$

در این صورت معادله (*) به صورت زیر در می آید

$$(M_y - N_x)\mu = -\frac{d\mu}{dy} M \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M} dy$$

برای اینکه معادله‌ی بالا جواب داشته باشد، با توجه به اینکه می‌دانیم μ فقط تابعی از y است،

باید عبارت $\frac{N_x - M_y}{M} = h(y)$ نیز تابعی فقط از y باشد. در این صورت داریم

$$\frac{d\mu}{\mu} = \underbrace{\frac{N_x - M_y}{M}}_{h(y)} dy = h(y)\, dy$$

$$\Rightarrow \ln \mu = \int h(y)\, dy \Rightarrow \mu = e^{\int h(y)\, dy}$$

پ) اگر μ به صورت تابعی از u قابل بیان باشد یعنی $\mu = \mu(u)$

در این صورت معادله‌ی (*) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی و ساده کنیم.

$$(M_y - N_x)\,\mu = \mu_x N - \mu_y M = \frac{\partial \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M$$

از طرف دیگر می‌دانیم

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} \underset{\substack{\uparrow \\ \mu = \mu(u)}}{=} \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \mu'(u)\, u_x$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} = \mu'(u)\, u_x$$ و

در (*)

$$\Longrightarrow \left(M_y - N_x\right)\mu = \mu'(u)\, u_x N - \mu'(u)\, u_y M$$

$$\Longrightarrow \left(M_y - N_x\right)\mu = \mu'(u)\left(u_x N - u_y M\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mu'(u)}{\mu(u)} = \frac{M_y - N_x}{u_x N - u_y M} \qquad (**)$$

برای اینکه معادله (**) جواب داشته باشد، با توجه به اینکه می‌دانیم سمت چپ معادله تابعی از u است، سمت راست معادله یعنی $\frac{M_y - N_x}{u_x N - u_y M} = h(u)$ نیز باید تابعی از u باشد.

$$(**) \Longrightarrow \frac{\mu'(u)}{\mu(u)} = \frac{M_y - N_x}{u_x N - u_y M} = h(u) \rightarrow \ln \mu(u) = \int h(u)\,du$$

$$\Longrightarrow \mu(u) = e^{\int h(u)\,du}$$

به یکی از حالت های متداول که برای u می توان در نظر گرفت ، $u = xy$

است. در این صورت معادله $(**)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\mu'(u)}{\mu(u)} = \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) = h(u)$$

$$u = xy \longrightarrow u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = y \quad , \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

$$\Rightarrow \quad \mu(u) = e^{\int h(u)\,du} \quad ؛ \quad \ln \mu = \int h(u)\,du$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\underbrace{(y^3 + xy^2 + y)}_{M}\,dx + \underbrace{(x^3 + x^2y + x)}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + 2xy + 1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad , \quad M_y - N_x = 3(y^2 - x^2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 1$$

از طرف دیگر داریم

$$\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{3(y^2-x^2)}{x^3y + \cancel{x^2y^2} + \cancel{xy} - xy^3 - \cancel{x^2y^2} - \cancel{xy}}$$

$$= \frac{3(y^2-x^2)}{xy(x^2-y^2)} = -\frac{3}{xy} = -\frac{3}{u} \quad , \quad u = xy$$

$$\Rightarrow \frac{\mu'(u)}{\mu(u)} = -\frac{3}{u} \Rightarrow \ln \mu = -3 \ln u$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{u^3} = \frac{1}{(xy)^3}$$

عامل انتگرال

$$\frac{1}{(xy)^3}\left[\left(y^3+xy^2+y\right)dx+\left(x^3+x^2y+x\right)dy=0\right]$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x^3y^2}\right)}_{M}dx+\underbrace{\left(\frac{1}{y^3}+\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{x^2y^3}\right)}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)-\frac{1}{x^3}\,\frac{2}{y^3}$$

$$\Longrightarrow$$ معادله کامل است.

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{y^3}\left(\frac{2}{x^3}\right)$$